Función matemática

Definición

Una correspondencia f de A en B se denominará función y se notará como $f : A \to B$ si y sólo si cumple con las siguientes condiciones:

1. Existencia: $\forall x \in A \quad \exists \mathrm{y} \in \mathrm{B}/(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{f}$
2. Unicidad: Si $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

Esto significa que a cada elemento de A le corresponde por f uno y solo un elemento de B.

A Gottfried Leibniz (1646-1716) se le adjudica haber utilizado por primera vez la palabra función (del latín *functo* que significa acto de realizar). La definición formal se le atribuye a Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

Véase también: Formas de expresar una función.

Dominio e Imagen

- El dominio de una función es el conjunto de existencia de la misma, o sea los valores para los cuales la función está definida. Dicho de otra forma, si el conjunto de existencia es vacío entonces no existe la función.

- El conjunto imagen está formado por los valores que alcanza la función.

  $$Im_f = \{y / y \in B \wedge \exists x \in A / (x, y) \in f\}$$

  Es decir que la función f(x) = x + 1 tiene como dominio e imagen todos los números reales, pero una función g(x) = x^2 si bien tendrá como dominio a todos los reales, su imagen sólo tendrá valores comprendidos entre 0 y +∞.

- Siempre es posible restringir tanto el conjunto dominio e imagen de una función con un propósito determinado. Por ejemplo si se quiere restringir f(x)=x^2 para que sea biyectiva es posible tomar una sóla de las ramas de modo que el dominio restringido y el conjunto imagen tomen valores del intervalo [0;+∞)

- Conjunto de ceros: Es el conjunto de puntos pertenecientes al dominio de la función para los cuales dicha función vale cero.

$$C_0 = \{x \in D_f / f(x) = 0\}$$

- Conjunto de negatividad: Es el conjunto de puntos pertenecientes al dominio de la función para los cuales dicha función toma valores negativos.

$$C^- = \{x \in D_f / f(x) < 0\}$$

- Conjunto de positividad: Es el conjunto de puntos pertenecientes al dominio de la función para los cuales dicha función toma valores positivos.

$$C^+ = \{x \in D_f / f(x) > 0\}$$

Tipos de funciones

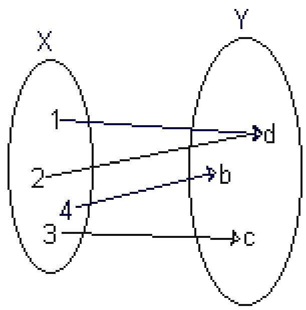
Veáse también: Clasificación de funciones matemáticas.

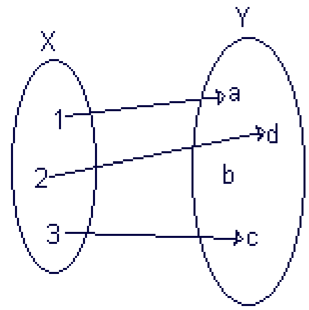
- Función inyectiva: Si cada elemento de la imagen es imagen de como máximo un único elemento del dominio. **f: A → B** es inyectiva $\leftrightarrow \forall x, y \in A : f(x) = f(y) \rightarrow x = y$; o lo que es lo mismo: $\leftrightarrow \forall x, y \in A : x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$

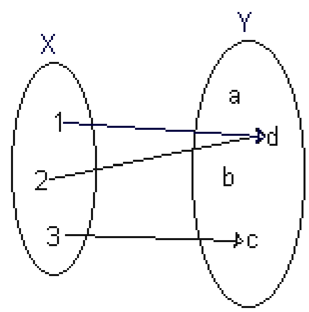
- Función sobreyectiva: **f: A → B** es sobreyectiva si el conjunto imagen coincide con el conjunto B (denominado también conjunto de llegada, codominio o rango). **f: A → B** es sobreyectiva $\leftrightarrow \forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y$

- Función biyectiva: **f: A → B** es biyectiva si **f** es inyectiva y sobreyectiva.

- Función inversa: Sólo si una función **f: A → B** es biyectiva es posible hallar su inversa $f^{-1} / f^{-1} : B \rightarrow A$

<table>
<tr>
<td>

Sobreyectiva, no inyectiva</td>
<td>

Inyectiva, no sobreyectiva</td>
</tr>
<tr>
<td>Biyectiva</td>
<td>

No sobreyectiva, no inyectiva</td>
</tr>
</table>

Composición de funciones

- Dadas dos funciones **f** y **g** para las cuales la imagen de **g** está incluída en el dominio de **f** entonces se puede hallar la función compuesta h / $h(x) = (fog)_{(x)} = f[g(x)]$
- Dada **f: A → B** biyectiva, existe $f^{-1} : B \to A/(fof^{-1}) = (f^{-1}of) = x$
  Véase función recíproca.

Funciones reales y discretas

- Si el dominio de una función es un intervalo de la recta real la función se denominará *real*. En cambio, si la función está definida para los números enteros se denominará *función discreta*. Un ejemplo de una *función discreta* son las sucesiones.

Funciones acotadas

- Una función se denomina acotada si su conjunto imagen está acotado. Ejemplo: f(x) = sen(x) y g(x) = cos(x) cuyo conjunto imagen es [-1;1]

Paridad e Imparidad de funciones

- Una función **f A → B** puede ser par, impar o ni una ni la otra.

1. Función par: $\forall x(x \in A \wedge -x \in A \rightarrow f(x) = f(-x))$
2. Función impar: $\forall x(x \in A \wedge -x \in A \rightarrow f(x) = -f(-x))$

Funciones monótonas

1. f es *estrictamente creciente* en $[a;b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
2. f es *estrictamente decreciente* en $[a;b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Si una función es estrictamente creciente o decreciente entonces es *biyectiva*.

1. f es *creciente* en $[a;b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
2. f es *decreciente* en $[a;b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Funciones periódicas

Una función es periódica si se cumple: f(x) = f(x + T) donde T es el periodo. Ver artículo sobre funciones periódicas.